COEFFICIENTI BINOMIALI

Michele Impedovo
michele.impedovo@uni-bocconi.it

Una definizione insiemistica

Se n è un numero naturale e k è un numero naturale compreso tra 0 e n, si indica con il simbolo $\binom{n}{k}$ il "coefficiente binomiale n su k". Una definizione (tra le tante possibili) è la seguente:

Definizione. $\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi di k elementi estratti da un insieme di n elementi.

Per esempio $\binom{5}{2}$ è il numero di sottoinsiemi di 2 elementi in un insieme di 5 elementi; se tale insieme è $\{a, b, c, d, e\}$ i sottoinsiemi da 2 elementi sono 10:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}.$$

Quindi

$$\binom{5}{2} = 10.$$

Prime proprietà

Sia A un insieme che contiene n elementi.

1. Per ogni n risulta $\binom{n}{0}$= 1: l'unico sottoinsieme da 0 elementi è l'insieme vuoto.
2. Per ogni n risulta $\binom{n}{n}$ = 1: l'unico sottoinsieme di A che contiene n elementi è A stesso.
3. Per ogni n risulta $\binom{n}{1}$ = n: in A infatti ci sono n sottoinsiemi da 1 elemento.
4. Per ogni n risulta $\binom{n}{n-1}$ = n: ci sono n sottoinsiemi da $n-1$ elementi in A; infatti un insieme da $n-1$ elementi è caratterizzato dall'unico elemento che non gli appartiene.
5. Per ogni n risulta $\binom{n}{k}$ = $\binom{n}{n-k}$: infatti per ogni sottoinsieme da k elementi esiste il sottoinsieme complementare, che ha $n-k$ elementi.
6. La somma di tutti i coefficienti binomiali di un certo n fissato (per k da 0 a n)è uguale a 2^n:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

Infatti tale somma è uguale al numero di <u>tutti</u> i sottoinsiemi di A (che costituiscono il cosiddetto *insieme delle parti* di A); un sottoinsieme B di A si può scegliere in 2^n modi diversi, perché per ciascun elemento di A si hanno due alternative possibili: metterlo o non metterlo in B.

ESEMPIO. Se $A = \{a, b, c, d, e\}$ allora:

- 1 sottoinsieme da 0 elementi: $\varnothing$

• 5 sottoinsiemi da 1 elemento: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$
• 10 sottoinsiemi da 2 elementi: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{d, e\}$
• 10 sottoinsiemi da 3 elementi: $\{c, d, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, d, e\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c\}$
• 5 sottoinsiemi da 4 elementi: $\{b, c, d, e\}$, $\{a, c, d, e\}$, $\{a, b, d, e\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, c, d\}$
• 1 sottoinsieme da 4 elementi: $\{a, b, c, d, e\}$
In tutto $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$ elementi.
Un altro modo di ottenere lo stesso risultato è il seguente: un sottoinsieme di A può essere caratterizzato da una stringa di 5 caratteri, ciascuno dei quali vale 0 (se l'elemento corrispondente non appartiene ad A) oppure 1 (se l'elemento corrispondente appartiene ad A). Per esempio la stringa 01101 corrisponde al sottoinsieme $\{b, c, e\}$. Ma le stringhe di cifre 0 o 1 sono i numeri naturali scritti in forma binaria: i sottoinsiemi di A sono dunque tutti i numeri compresi tra 00000 (l'insieme vuoto) e 11111 (l'insieme A), che sono appunto 2^5.

Il triangolo di Pascal

I coefficienti binomiali sono quelli che si costruiscono, riga per riga, mediante il triangolo di Tartaglia (o di Pascal):

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\dots
\end{array}
$$

La riga n ($n = 0, 1, 2, \dots$) contiene gli $n+1$ coefficienti $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$. Ognuno di essi si ottiene sommando i due coefficienti che gli stanno immediatamente sopra, a destra e a sinistra, nella riga precedente. Questa è una proprietà che dimostriamo.

Teorema. Per ogni numero naturale $n \geq 1$ e per ogni $k=0, \dots, n$ risulta

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dimostrazione. Sia A un insieme di n elementi: $A=\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ e sia $B=\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ l'insieme con $n-1$ elementi ottenuto da A togliendo l'ultimo elemento. Quanti sono i sottoinsiemi di k elementi di A? Dividiamoli in due categorie: quelli che non contengono a_n e quelli che contengono a_n.

Quelli che non contengono a_n sono esattamente $\binom{n-1}{k}$: sono gli stessi sottoinsiemi di B.

Quelli che contengono a_n sono esattamente $\binom{n-1}{k-1}$: sono tanti quanti i sottoinsiemi di B con $k-1$ elementi a ciascuno dei quali si aggiunge a_n.

Per esempio: $\binom{5}{2}=\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=6+4=10$. Infatti i sottoinsiemi di 2 elementi in $A=\{a, b, c, d, e\}$ sono:

- i sottoinsiemi di 2 elementi di $B=\{a, b, c, d\}$: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$
- i sottoinsiemi di 1 elemento di B a ciascuno dei quali si aggiunge e: $\{a, e\}$, $\{b, e\}$, $\{c, e\}$, $\{d, e\}$.

La definizione aritmetica

Si pone ora il problema di calcolare direttamente un coefficiente binomiale, senza ricorrere al faticoso conteggio del numero di sottoinsiemi di un insieme, né al triangolo di Pascal.

Innanzitutto ricordiamo che un insieme di k elementi si può ordinare in $k!$ modi (si legge "k fattoriale"), dove per definizione

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k.$$

Infatti possiamo scegliere il primo elemento in k modi diversi, il secondo n k−1 modi diversi, …, l'ultimo in 1 solo modo; le scelte sono indipendenti e perciò il numero totale di scelte è $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = k!$. Ogni ordinamento si chiama *permutazione*: il numero di permutazioni di k elementi è $k!$.

Veniamo ora al nostro problema: quanti sono i sottoinsiemi di k elementi in un insieme di n elementi? Per scegliere k elementi su n possiamo procedere così: il primo elemento lo possiamo scegliere in n modi, il secondo in $n-1$ modi, …, l'ultimo in $n-k+1$ modi. Abbiamo così scelto <u>ordinatamente</u> k elementi su n. Il numero di sottoinsiemi <u>ordinati</u> di k è dunque

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Poiché in un insieme gli elementi non sono ordinati, ciascun sottoinsieme è così stato contato $k!$ volte, tante quanti sono i possibili ordinamenti di k elementi. Concludendo:

$$\binom{n}{k}=\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Vediamo allora un'altra dimostrazione del teorema $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

Risulta

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)\cdot \ldots (n-k+1)}{(k-1)!}+\frac{(n-1)\cdot \ldots (n-k)}{k!} \\
&= \frac{k(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)+(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k)}{k!} \\
&= \frac{(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)\cdot (k+n-k)}{k!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Un altro modo di calcolare $\binom{n}{k}$ si ottiene moltiplicando $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ per $(n-k)!$, ottenendo così un'espressione del coefficiente binomiale che sfrutta solo i fattoriali:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Quest'ultima definizione mostra chiaramente la simmetria dei coefficienti binomiali: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

La distribuzione binomiale

I coefficienti binomiali giocano un ruolo fondamentale nel calcolo delle probabilità.
Consideriamo il classico problema "binomiale": la moneta truccata.
Lanciando una moneta truccata esce TESTA con probabilità p e CROCE con probabilità q=1−p. Una tale moneta è chiamata anche "moneta di trucco p"; più in generale possiamo pensare a qualunque evento che si possa verificare con probabilità p o non verificare con probabilità 1−p. Su alcuni testi è chiamato anche "processo bernoulliano di trucco p".
Lanciamo tale moneta n volte. Qual è la probabilità che esca TESTA k volte (e quindi che esca CROCE n−k volte)?
Quando lanciamo una moneta n volte otteniamo una stringa di n caratteri, ciascuno dei quali è "T" oppure "C". Per esempio la stringa TCC corrisponde a n=3 lanci di una moneta che hanno dato come uscite ordinatamente TESTA, CROCE, CROCE. La probabilità di questo evento (poiché l'esito di ogni lancio è indipendente dagli altri) è pqq.
ESEMPIO. Lanciamo una moneta n=5 volte e vogliamo sapere qual è la probabilità che TESTA esca k=2 volte. Gli esiti favorevoli corrispondono alle stringhe in cui ci sono due "T" e 3 "C": per quello che abbiamo visto, il numero di tali stringhe è uguale al numero di sottoinsiemi di 2 elementi in un insieme di 5 elementi, cioè $\binom{5}{2}$, e la probabilità di ciascuno di questi eventi è il prodotto di 5 fattori, due dei quali uguale a p e tre dei quali uguale a q. Quindi la probabilità che lanciando 5 volte una moneta di trucco p esca TESTA 2 volte è

$$pr(5, 2, p) = \binom{5}{2} p^2\, q^3.$$

Se la moneta è equa, cioè di trucco 1/2, allora $p = q = 1/2$:

$$pr(5, 2, p) = \binom{5}{2}\frac{1}{2^5} = \frac{10}{32} = 31.25\%.$$

Se la moneta è di trucco p = 0.1 allora

$$pr(5, 2, p) = \binom{5}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^3 = 7.3\%.$$

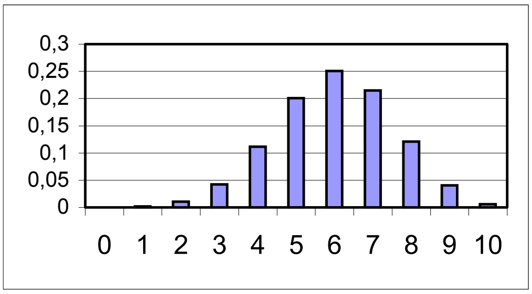
L'esempio svolto ci conduce in modo naturale alla generalizzazione: se lanciamo una moneta di trucco p n volte, la probabilità che esca TESTA k volte (k può valere 0, 1, 2, …, n) è

$$pr(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}.$$

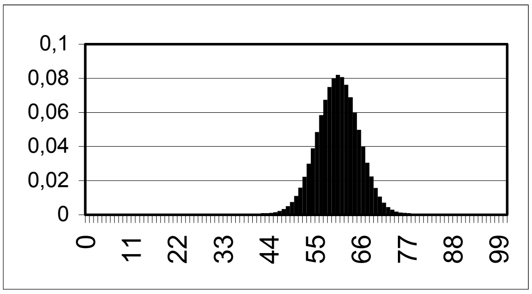
Per esempio, se lanciamo 10 volte una moneta di trucco p = 0.6, la distribuzione delle probabilità di uscita di k volte TESTA è data dalla tabella

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pr	0%	0.2%	1.1%	4.2%	11.1%	20.1%	25.1%	21.5%	12.1%	4%	0.6%

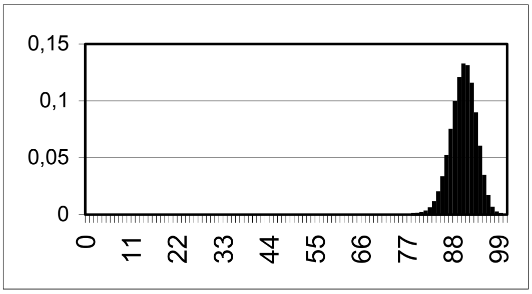
e dall'istogramma seguente.



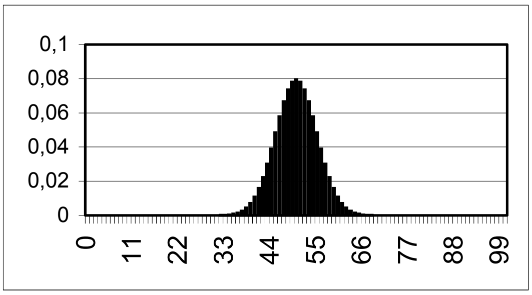
All'aumentare del numero di lanci la probabilità $pr(n, k, p)$, per un dato k, diminuisce poiché la somma di tutte le probabilità deve dare 1. Vediamo ad esempio l'istogramma relativo a $n = 100$ e $p = 0.6$.



Si osserva, come ci aspettiamo, che il massimo si ottiene per $k = 60$ (in generale per $k = np$); inoltre si osserva che allontanandosi da 60 le probabilità decrescono rapidamente, tanto che tra 45 e 75 è compreso il 99.9% delle probabilità.
Che cosa succede all'aumentare di p? Ecco per esempio la distribuzione con $p = 0.9$.



Con $p = 0.5$ la moneta non è truccata, è "equa" e la distribuzione è simmetrica rispetto a $k = 50$.



La funzione gaussiana

Che cosa accade al tendere di n a ∞? La distribuzione binomiale tende ad assumere la forma a campana tipica della funzione

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Si può dimostrare che per la distribuzione binomiale la funzione densità di probabilità ha parametri

$$m = np \qquad\qquad \sigma = \sqrt{npq}\,.$$

Perciò, al tendere di n a ∞, risulta

$$pr(n, k, p) = \int_{k-0.5}^{k+0.5} f(x)\,dx\,.$$

ESEMPIO. La probabilità che lanciando 20 volte una moneta di trucco p=0.6 esca TESTA 10 volte è

$$pr(20, 10, 0.6) = \binom{20}{10} 0.6^{10} \cdot 0.4^{10} = 11.7\%.$$

Approssimando con la gaussiana risulta

$$pr(20, 10, 0.6) \approx \int_{9.5}^{10.5} f(x)\,dx = 11.9\%$$

Un problema tipico è quello di calcolare la probabilità che TESTA esca un numero di compreso tra a e b:

$$pr(n, a \le k \le b, p) = \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\,.$$

Tale calcolo, quando n è grande, risulta difficoltoso; la funzione di Gauss ci fornisce l'approssimazione

$$pr(n, a \le k \le b, p) \approx \int_{a-0.5}^{b+0.5} f(x)\,dx\,.$$

ESEMPIO. Qual è la probabilità che lanciando 100 volte una moneta di trucco p = 0.6 esca TESTA un numero di volte compreso tra 55 e 65? Risulta

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 73.86\%$$

$$\int_{a-0.5}^{b+0.5} f(x)\,dx = 73.84\%.$$